Prof. Martín Moyano

Z2053 PRIMER EXAMEN PARCIAL ANÁLISIS MATEMÁTICO II 12/08/20

EJERCICIO 1: Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial

$xyy' = 1 - x^2$, que pasa por el punto $\overline{P_0} = (1,2)$.

EJERCICIO 2: Justifique la existencia o no, de los límites de las siguientes funciones, en el origen de coordenadas:

$$a)\ \ f_{(x,y)} = \frac{5xy}{x^2+y^2} \quad , \quad b)\ \ g_{(x,y)} = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4}$$

EJERCICIO 3: Analizar la existencia de extremos de: $f_{(x,y)} = e^{2+x^2-y^2}$

EJERCICIO 4: Mediante un polinomio de Taylor de orden 2, aproxime el valor de $\frac{(3{,}98-1)^2}{(5{,}97-3)^2}$.

Sugerencia: considere $f_{(x,y)} = \frac{(x-1)^2}{(y-3)^2}$, $(x_0, y_0) = (4{,}6)$

AM2	1° parcial Prof. Moyano	HOJA N° 1/1 FECHA 12-8-20

EJ 1 Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $x\,y\,y' = 1-x^2$ que pase por $P_0 = (1,2)$

$$y\,y' = \frac{1-x^2}{x} = y\,\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{1-x^2}{x}\,dx = y\,dy$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right)dx = y\,dy$$

integro m.a.m $\quad \ln(x) - \frac{x^2}{2} + C = \frac{y^2}{2}$

pasa por $(1,2) \rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix} \qquad \underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1^2}{2} + C = \frac{4}{2} \longrightarrow C = \frac{5}{2}$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 5 + 2\ln(x)}$$

EJ 2 Justificar la existencia o no de los límites de las sig. funciones, en el origen de coordenadas:

a) $f(x,y) = \dfrac{5xy}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2+y^2} \begin{cases} \xrightarrow{x=0} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \\ \xrightarrow{y=x} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5yy}{y^2+y^2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \neq \therefore \boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2+y^2}}$$

b) $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \begin{cases} \xrightarrow{y=0} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \\ \xrightarrow{y^2=x} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2y^2}{y^4+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \neq$$

$$\boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}}$$

NOTA

EJ 3 Analizar la existencia de extremos de : $f(x,y) = e^{2+x^2-y^2}$

f es dif $\Rightarrow$ busco (x,y) / $\overline{\nabla} f(x,y) = (0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = \underbrace{e^{2+x^2-y^2}}_{\neq 0} \cdot 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ f'_y = \underbrace{e^{2+x^2-y^2}}_{\neq 0} (-2y) = 0 \rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \boxed{PC = (0,0)}$$

Criterio del hessiano

$$f''_{xx} = e^{2+x^2-y^2}\, 2x \cdot 2x + e^{2+x^2-y^2}\, 2 \rightarrow f''_{xx(0,0)} = 2$$

$$f''_{xy} = e^{2+x^2-y^2}(-2y)\, 2x \longrightarrow f''_{xy(0,0)} = 0$$

$$f''_{yy} = e^{2+x^2-y^2}(-2y)(-2y) + e^{2+x^2-y^2}(-2) \rightarrow f''_{yy(0,0)} = -2$$

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |H_{(0,0)}| = -4 < 0 \rightarrow \boxed{\text{No hay extremo}}$$

EJ 4 Mediante un pol. de taylor de orden 2, aproximar el valor de $\frac{(3,98-1)^2}{(5,97-3)^2}$ (Sugerencia: considerar $f(x,y) = \frac{(x-1)^2}{(y-3)^2}$, con $(x_0,y_0) = (4,6)$)

$$\boxed{f(4,6) = 1}, \quad f'_{x}(4,6) = \left.\frac{2(x-1)}{(y-3)^2}\right|_{(4,6)} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3} = f'_x(4,6)}$$

$$f'_y(4,6) = \left.\frac{-2(x-1)^2}{(y-3)^3}\right|_{(4,6)} = \frac{-18}{27} = \boxed{-\frac{2}{3} = f'_y(4,6)}$$

$$f''_{xx}(4,6) = \left.\frac{2}{(y-3)^2}\right|_{(4,6)} = \boxed{\frac{2}{9} = f''_{xx}(4,6)} \quad ; \quad f''_{xy}(4,6) = \left.\frac{-4(x-1)}{(y-3)^3}\right|_{(4,6)} = \frac{-12}{27} = \boxed{\frac{-4}{9} = f''_{xy}(4,6)}$$

$$f''_{yy}(4,6) = \left.\frac{6(x-1)^2}{(y-3)^4}\right|_{(4,6)} = \frac{54}{81} = \boxed{\frac{2}{3} = f''_{yy}(4,6)}$$

Pol. taylor orden 2:

$$P(x,y) = f(4,6) + f'_x(4,6)(x-4) + f'_y(4,6)(y-6) + \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(4,6)(x-4)^2 + 2f''_{xy}(4,6)(x-4)(y-6) + f''_{yy}(4,6)(y-6)^2\right] =$$

$$= 1 + \frac{2}{3}(x-4) - \frac{2}{3}(y-6) + \frac{1}{9}(x-4)^2 - \frac{4}{9}(x-4)(y-6) + \frac{1}{3}(y-6)^2 = P(x,y)$$

$(x-4) \rightarrow (3,98-4) = -0,02$

$(y-6) \rightarrow (5,97-6) = -0,03$

$$\boxed{\frac{(3,98-1)^2}{(5,97-3)^2} \cong 1,006766667}$$

$$\frac{(3,98-1)^2}{(5,97-3)^2} \cong 1 + \frac{2}{3}(-0,02) - \frac{2}{3}(-0,03) + \frac{1}{9}(-0,02)^2 - \frac{4}{9}(-0,02)(-0,03) + \frac{1}{3}(-0,03)^2 \cong 1,006766$$

NOTA